समांतर श्रेढ़ियाँ

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» संख्याओं के प्रतिरूप और समांतर श्रेढ़ी की पहचान

प्रश्न 1 (आसान). क्या 3, 6, 9, 12... एक AP है? अगर हाँ, तो सार्व अंतर बताओ।

उत्तर – हाँ, d = 3

प्रश्न 2 (आसान). क्या 10, 8, 6, 4... एक AP है? अगर हाँ, तो सार्व अंतर बताओ।

उत्तर – हाँ, d = -2

प्रश्न 3 (मध्यम). क्या 1, 4, 9, 16... एक AP है? क्यों?

उत्तर – नहीं, क्योंकि क्रमागत पदों का अंतर समान नहीं है (4-1=3, 9-4=5)।

प्रश्न 4 (कठिन). अगर किसी AP का पहला पद 7 है और सार्व अंतर 4 है, तो उसके पहले चार पद लिखो।

उत्तर – 7, 11, 15, 19

» समांतर श्रेढ़ी (A.P.) की परिभाषा और सार्व अंतर (d)

प्रश्न 5 (आसान). श्रेढ़ी 2, 4, 6, 8... का सार्व अंतर (d) बताओ।

उत्तर – 2

प्रश्न 6 (आसान). श्रेढ़ी 10, 7, 4, 1... का पहला पद (a) क्या है?

उत्तर – 10

प्रश्न 7 (मध्यम). श्रेढ़ी -3, -1, 1, 3... में प्रथम पद (a) और सार्व अंतर (d) ज्ञात कीजिए।

उत्तर – a = -3, d = 2

प्रश्न 8 (कठिन). अगर एक समांतर श्रेढ़ी का पहला पद 1.5 है और सार्व अंतर 0.5 है, तो उसके पहले चार पद लिखो।

उत्तर – 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

» समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप

प्रश्न 9 (आसान). यदि a = 5 और d = 2 है, तो AP के पहले 3 पद क्या होंगे?

उत्तर – 5, 7, 9

प्रश्न 10 (आसान). यदि a = -3 और d = 4 है, तो AP के पहले 3 पद क्या होंगे?

उत्तर – -3, 1, 5

प्रश्न 11 (मध्यम). एक AP का पहला पद 10 है और सार्व अंतर -5 है। इसके पहले 4 पद लिखिए।

उत्तर – 10, 5, 0, -5

प्रश्न 12 (कठिन). यदि a = 1.5 और d = 0.5 है, तो AP के पहले 5 पद क्या होंगे?

उत्तर – 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5

» परिमित और अपरिमित समांतर श्रेढ़ियां

प्रश्न 13 (आसान). क्या 1, 2, 3, 4, 5 एक परिमित AP है?
उत्तर – हाँ

प्रश्न 14 (आसान). क्या 5, 10, 15, 20, ... एक अपरिमित AP है?
उत्तर – हाँ

प्रश्न 15 (मध्यम). निम्नलिखित में से कौन सी AP परिमित है? (i) 100, 90, 80, ... (ii) -3, -2, -1, 0, ..., 5 (iii) 1/2, 1/3, 1/4, ...
उत्तर – (ii) -3, -2, -1, 0, ..., 5

» दिए गए प्रथम पद और सार्व अंतर से AP बनाना

प्रश्न 16 (आसान). यदि a = 7 और d = 2 है, तो AP के पहले दो पद क्या होंगे?
उत्तर – 7, 9

प्रश्न 17 (आसान). यदि a = 10 और d = -1 है, तो AP के पहले दो पद क्या होंगे?
उत्तर – 10, 9

प्रश्न 18 (मध्यम). निम्नलिखित सूची AP है या नहीं? 2, 4, 6, 8, ... यदि है, तो 'a' और 'd' ज्ञात कीजिए।
उत्तर – हाँ, यह AP है। a = 2, d = 2।

प्रश्न 19 (कठिन). निम्नलिखित सूची AP है या नहीं? -1.2, -3.2, -5.2, -7.2, ... यदि है, तो 'a' और 'd' ज्ञात कीजिए और अगले तीन पद लिखिए।
उत्तर – हाँ, यह AP है। a = -1.2, d = -2.0। अगले तीन पद हैं: -9.2, -11.2, -13.2।

» A.P. का nवाँ पद ज्ञात करना (an = a + (n-1)d)

प्रश्न 20 (आसान). A.P. : 3, 6, 9, ... का 5वाँ पद ज्ञात करें।
उत्तर – 15

प्रश्न 21 (आसान). अगर a=10, d=4, तो A.P. का तीसरा पद क्या होगा?
उत्तर – 18

प्रश्न 22 (मध्यम). A.P. : 20, 17, 14, ... का कौन सा पद -10 है?
उत्तर – 11वाँ पद

प्रश्न 23 (कठिन). अगर किसी A.P. का तीसरा पद 9 और 7वाँ पद 21 है, तो उसका 10वाँ पद क्या होगा?
उत्तर – 30

» दिए गए AP के अंतिम पद से nवाँ पद ज्ञात करना

प्रश्न 24 (आसान). AP: 2, 4, 6, . . . , 20 का अंतिम पद से तीसरा पद ज्ञात करें।
उत्तर – 16

प्रश्न 25 (आसान). AP: 5, 10, 15, . . . , 50 का अंतिम पद से दूसरा पद ज्ञात करें।
उत्तर – 45

प्रश्न 26 (मध्यम). AP: 100, 95, 90, . . . , 10 का अंतिम पद से 5वाँ पद ज्ञात करें।
उत्तर – 30

प्रश्न 27 (कठिन). AP: -5, -8, -11, . . . , -230 का अंतिम पद से 10वाँ पद ज्ञात करें।
उत्तर – -203

» A.P. के प्रथम n पदों का योग (Sn = n/2 [2a + (n-1)d])

प्रश्न 28 (आसान). AP: 1, 3, 5, 7,... के प्रथम 5 पदों का योग ज्ञात करें।

उत्तर – S5 = 25

प्रश्न 29 (आसान). AP: 10, 20, 30,... के प्रथम 3 पदों का योग ज्ञात करें।

उत्तर – S3 = 60

प्रश्न 30 (मध्यम). AP: -37, -33, -29,... के प्रथम 12 पदों का योग ज्ञात करें।

उत्तर – S12 = -180

प्रश्न 31 (कठिन). यदि किसी AP का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है, तो पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

उत्तर – n = 16, d = 8/3

» A.P. के प्रथम n पदों का योग जब अंतिम पद ज्ञात हो (Sn = n/2 [a + l])

प्रश्न 32 (आसान). एक AP में, a = 3, l = 27, n = 5 है। योग ज्ञात करें।

उत्तर – Sn = 5/2 [3 + 27] = 5/2 [30] = 5 * 15 = 75

प्रश्न 33 (आसान). यदि a = 10, l = 100 और n = 20, तो Sn क्या होगा?

उत्तर – Sn = 20/2 [10 + 100] = 10 [110] = 1100

प्रश्न 34 (मध्यम). एक AP का पहला पद 7 है और 15वाँ पद 63 है। यदि इसमें कुल 15 पद हैं, तो इसका योग ज्ञात करें।

उत्तर – यहाँ, a = 7, l = 63, n = 15। Sn = 15/2 [7 + 63] = 15/2 [70] = 15 * 35 = 525

प्रश्न 35 (कठिन). एक AP का पहला पद -5 है, अंतिम पद 45 है, और इसका योग 200 है। पदों की संख्या (n) ज्ञात करें।

उत्तर – Sn = n/2 [a + l] => 200 = n/2 [-5 + 45] => 200 = n/2 [40] => 200 = 20n => n = 10

» n पदों के योग से nवाँ पद ज्ञात करना (an = Sn - Sn-1)

प्रश्न 36 (आसान). यदि Sn = 2n + 1 है, तो a2 ज्ञात कीजिए।

उत्तर – S2 = 2(2)+1 = 5, S1 = 2(1)+1 = 3, a2 = S2 - S1 = 5 - 3 = 2

प्रश्न 37 (मध्यम). किसी AP के प्रथम n पदों का योग Sn = 3n² - 2n है। तो उसका 5वाँ पद (a5) ज्ञात कीजिए।

उत्तर – S5 = 3(5)² - 2(5) = 75 - 10 = 65, S4 = 3(4)² - 2(4) = 48 - 8 = 40, a5 = S5 - S4 = 65 - 40 = 25

प्रश्न 38 (कठिन). एक AP में, यदि Sn = n/2 (2a + (n-1)d) है, तो इस सूत्र का उपयोग करके सिद्ध करें कि an = Sn - Sn-1

उत्तर – Sn - Sn-1 = [n/2 (2a + (n-1)d)] - [(n-1)/2 (2a + (n-2)d)]। इसे हल करने पर, अंत में हमें a + (n-1)d मिलेगा, जो कि an के बराबर है।

» दैनिक जीवन की समस्याओं में AP के सूत्रों का अनुप्रयोग

प्रश्न 39 (आसान). एक व्यक्ति पहले दिन ₹50 बचाता है, और हर अगले दिन ₹10 ज़्यादा बचाता है। तीसरे दिन उसने कितने रुपये बचाए?

उत्तर – ₹70

प्रश्न 40 (आसान). अगर एक खेत में पहले साल 100 क्विंटल गेहूँ हुआ और हर साल 5 क्विंटल ज़्यादा होता है, तो चौथे साल में कितना गेहूँ होगा?

उत्तर – 115 क्विंटल

प्रश्न 41 (मध्यम). एक निर्माण कंपनी पहले महीने 20 घर बनाती है और हर महीने 3 घर ज़्यादा बनाती है। एक साल में (12 महीने) कंपनी कुल कितने घर बनाएगी?

उत्तर – 450 घर

प्रश्न 42 (कठिन). एक प्रतियोगिता में, पहले इनाम वाले को ₹5000, दूसरे वाले को ₹4500, तीसरे वाले को ₹4000 मिलते हैं, और ऐसे ही इनाम ₹500 कम होते जाते हैं। अगर कुल 8 इनाम दिए गए, तो कुल इनाम राशि कितनी होगी?

उत्तर – ₹26000

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. क्या संख्याओं की सूची 2, 5, 8, 11, ... एक समांतर श्रेढ़ी है? यदि हाँ, तो इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

› पहला पद (a) = 2
› दूसरा पद (a) = 5
› तीसरा पद (a) = 8
› चौथा पद (a) = 11
› हम क्रमागत पदों का अंतर निकालेंगे:
› a - a = 5 - 2 = 3
› a - a = 8 - 5 = 3
› a - a = 11 - 8 = 3
› चूंकि हर बार अंतर (3) समान है।

उत्तर – हाँ, यह एक समांतर श्रेढ़ी है, और इसका सार्व अंतर (d) 3 है।

उदाहरण 2. समांतर श्रेढ़ी 5, 10, 15, 20... के लिए प्रथम पद (a) और सार्व अंतर (d) ज्ञात कीजिए।

› यहाँ, संख्याओं की सूची है: 5, 10, 15, 20...
› पहला पद (a) वह संख्या है जिससे श्रेढ़ी शुरू होती है, तो a = 5।
› सार्व अंतर (d) निकालने के लिए, हम दूसरे पद में से पहले पद को घटाते हैं: d = a - a = 10 - 5 = 5।
› हम इसे किसी भी दो क्रमागत पदों से जाँच सकते हैं: a - a = 15 - 10 = 5, और a - a = 20 - 15 = 5।
› क्योंकि अंतर हर बार समान 5 आ रहा है, इसलिए यह एक AP है।

उत्तर – प्रथम पद (a) = 5 और सार्व अंतर (d) = 5।

उदाहरण 3. यदि किसी AP का प्रथम पद (a) = 7 है और सार्व अंतर (d) = 3 है, तो इस AP के प्रथम चार पद लिखिए।

› पहला पद (a) हमें दिया गया है = 7।
› दूसरा पद (a) निकालने के लिए, पहले पद में सार्व अंतर (d) जोड़ेंगे: a + d = 7 + 3 = 10।
› तीसरा पद (a) निकालने के लिए, दूसरे पद में फिर से सार्व अंतर (d) जोड़ेंगे: a + 2d = 7 + 2(3) = 7 + 6 = 13।
› चौथा पद (a) निकालने के लिए, तीसरे पद में फिर से सार्व अंतर (d) जोड़ेंगे: a + 3d = 7 + 3(3) = 7 + 9 = 16।

उत्तर – तो AP के प्रथम चार पद हैं: 7, 10, 13, 16।

उदाहरण 4. बताओ, 2, 4, 6, 8, ..., 20 यह एक परिमित AP है या अपरिमित AP?

› सबसे पहले, दी गई AP को ध्यान से देखें: 2, 4, 6, 8, ..., 20।
› अब देखो, क्या इसमें कोई अंतिम पद दिया गया है? हाँ, यहाँ अंतिम पद '20' है।
› क्योंकि इसमें एक निश्चित अंतिम पद है और '...' के बाद कोई संख्या नहीं है, इसका मतलब पदों की संख्या सीमित है।

उत्तर – यह एक परिमित AP है।

उदाहरण 5. AP के प्रथम चार पद लिखिए, यदि प्रथम पद (a) = 5 और सार्व अंतर (d) = 3 है।

› पहला पद (a) = a = 5
› दूसरा पद (a) = a + d = 5 + 3 = 8
› तीसरा पद (a) = a + d = 8 + 3 = 11
› चौथा पद (a) = a + d = 11 + 3 = 14

उत्तर – AP के प्रथम चार पद हैं: 5, 8, 11, 14।

उदाहरण 6. A.P. : 2, 7, 12, ... का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, हम AP से 'a' और 'd' पहचानेंगे। यहाँ, पहला पद (a) = 2 है।
› सार्व अंतर (d) = दूसरा पद - पहला पद = 7 - 2 = 5 है।
› हमें 10वाँ पद निकालना है, तो n = 10 होगा।
› अब हम सूत्र an = a + (n-1)d लगाएंगे।
› a10 = 2 + (10 - 1) × 5
› a10 = 2 + (9) × 5
› a10 = 2 + 45
› a10 = 47

उत्तर – इस AP का 10वाँ पद 47 है।

उदाहरण 7. AP: 10, 7, 4, . . . , -62 का अंतिम पद से 11वाँ पद ज्ञात कीजिए।

› पहला तरीका (कुल पदों की संख्या ज्ञात करके):
› यहाँ a = 10, d = 7 - 10 = -3, l = -62।
› पहले हम कुल पदों की संख्या (N) ज्ञात करेंगे: l = a + (N-1)d
› -62 = 10 + (N-1)(-3)
› -72 = (N-1)(-3)
› N-1 = 24, तो N = 25।
› अब, अंतिम से 11वाँ पद, शुरुआत से (25 - 11 + 1) = 15वाँ पद होगा।
› तो, a15 = a + (15-1)d = 10 + 14(-3) = 10 - 42 = -32।
› दूसरा तरीका (AP को उल्टा करके):
› AP को उल्टा करने पर, पहला पद (a') अंतमि पद बन जाता है, यानी a' = -62।
› और सार्व अंतर (d') का चिन्ह बदल जाता है, यानी d' = -(-3) = 3।
› अब, इस नई AP का 11वाँ पद ज्ञात करना है: a'11 = a' + (11-1)d'
› a'11 = -62 + (10)(3) = -62 + 30 = -32।

उत्तर – अंतिम पद से 11वाँ पद -32 है।

उदाहरण 8. AP: 2, 7, 12, ... के प्रथम 10 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

› यहाँ, प्रथम पद (a) = 2 है।
› सार्व अंतर (d) = 7 - 2 = 5 है।
› पदों की संख्या (n) = 10 है।
› सूत्र है: Sn = n/2 [2a + (n-1)d]
› मान रखने पर: S10 = 10/2 [2 × 2 + (10-1) × 5]
› S10 = 5 [4 + 9 × 5]
› S10 = 5 [4 + 45]
› S10 = 5 [49]
› S10 = 245

उत्तर – AP के प्रथम 10 पदों का योग 245 है।

उदाहरण 9. एक AP में, पहला पद 5 है, अंतिम पद 50 है, और कुल 10 पद हैं। इस AP के सभी पदों का योग ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, हमें जो जानकारी दी गई है उसे लिखते हैं:
› प्रथम पद (a) = 5
› अंतिम पद (l) = 50
› पदों की संख्या (n) = 10
› अब, हम सूत्र Sn = n/2 [a + l] का उपयोग करते हैं।
› मानों को सूत्र में रखने पर:
› Sn = 10/2 [5 + 50]
› Sn = 5 [55]
› गुणा करने पर:
› Sn = 275

उत्तर – इस AP के सभी पदों का योग 275 है।

उदाहरण 10. यदि किसी AP के प्रथम n पदों का योग Sn = 4n - n² है, तो उसका 3रा पद ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले हमें S3 और S2 निकालना होगा।
› S3 = 4(3) - (3)² = 12 - 9 = 3
› S2 = 4(2) - (2)² = 8 - 4 = 4
› अब an = Sn - Sn-1 सूत्र का उपयोग करेंगे। हमें a3 निकालना है, तो n=3 लेंगे।
› a3 = S3 - S2
› a3 = 3 - 4
› a3 = -1

उत्तर – तीसरा पद -1 है।

उदाहरण 11. एक व्यक्ति 2020 में ₹50000 वार्षिक वेतन से नौकरी शुरू करता है। यदि उसके वेतन में प्रत्येक वर्ष ₹2000 की वार्षिक वृद्धि होती है, तो 2025 में उसका वेतन कितना होगा और उसने 2020 से 2025 तक कुल कितने रुपये कमाए?

› पहला पद (a) = ₹50000 (2020 का वेतन)
› सार्व अंतर (d) = ₹2000 (वार्षिक वृद्धि)
› वर्षों की संख्या (n): 2020 पहला वर्ष, 2021 दूसरा, ..., 2025 सातवाँ वर्ष होगा। तो n = 7।
› 2025 में वेतन (a_n): a_n = a + (n-1)d = 50000 + (7-1)2000 = 50000 + 6∗2000 = 50000 + 12000 = ₹62000।
› 2020 से 2025 तक कुल कमाई (S_n): S_n = n/2 [2a + (n-1)d] = 7/2 [2∗50000 + (7-1)2000] = 7/2 [100000 + 12000] = 7/2 ∗ 112000 = 7 ∗ 56000 = ₹392000।

उत्तर – 2025 में उसका वेतन ₹62000 होगा, और 2020 से 2025 तक उसने कुल ₹392000 कमाए।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह बहुत ही बेसिक कॉन्सेप्ट है, लेकिन बोर्ड परीक्षा में छोटे-छोटे प्रश्न आ सकते हैं, जैसे कोई सूची AP है या नहीं, या सार्व अंतर ज्ञात करो।

• यह परिभाषा और सार्व अंतर (d) ज्ञात करना बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इस पर आधारित सीधे सवाल अक्सर पूछे जाते हैं, खासकर 'd' निकालने वाले।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि इसके आधार पर AP के पद लिखने और पहचानने वाले प्रश्न अक्सर आते हैं।

• एक नंबर के प्रश्नों में अक्सर पहचानने को आता है कि दी गई AP परिमित है या अपरिमित। '...' देखकर पहचानना याद रखना!

• यह विषय बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर सीधे प्रश्न आते हैं कि 'a' और 'd' दिया गया है, AP के पद बनाओ, या संख्याओं की सूची दी है, बताओ AP है या नहीं और अगले पद लिखो। इन सवालों में पूरे अंक लेना बहुत आसान होता है, बस थोड़ी सी सावधानी चाहिए।

• यह सूत्र बोर्ड परीक्षा में 2-3 नंबर के सवालों में सीधे पूछा जाता है या इसका प्रयोग बड़े सवालों में एक स्टेप के रूप में होता है। इसे रट लो और इसका सही उपयोग समझ लो।

• यह प्रश्न बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर 2 या 3 नंबर में पूछा जाता है। इसे हल करने के दोनों तरीके अच्छे से समझ लें, खासकर AP को उल्टा करके d का चिन्ह बदलने वाला तरीका, क्योंकि वह अक्सर तेज़ होता है।

• यह सूत्र बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इस पर आधारित सीधे प्रश्न और साथ ही अनुप्रयोग वाले प्रश्न भी आते हैं। सूत्र को अच्छे से याद करके, उसके सभी घटकों 'a', 'd', 'n' को पहचानना सीखो।

• यह सूत्र बोर्ड परीक्षाओं में समय बचाने में बहुत मदद करता है, खासकर बहुविकल्पीय प्रश्नों में या जब सीधे अंतिम पद दिया गया हो। इसे अच्छे से याद कर लें!

• यह सूत्र बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर उन प्रश्नों को हल करने के लिए उपयोग होता है जहाँ 'Sn' का व्यंजक (expression) दिया होता है और कोई विशिष्ट 'an' पद पूछा जाता है, या 'an' के व्यंजक से 'Sn' निकालने को कहा जाता है। इसे अच्छे से समझ लो!

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। 'केस स्टडी' वाले प्रश्न अक्सर इसी पर आधारित होते हैं, जहाँ आपको एक कहानीनुमा समस्या को AP में बदलकर हल करना होता है।

एक नज़र में रिवीज़न

› AP: क्रमागत पदों का अंतर समान (सार्व अंतर 'd')।

› AP = प्रत्येक पद में निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त; d = a - a

› AP व्यापक रूप: a, a+d, a+2d,... (a=प्रथम पद, d=सार्व अंतर)

› परिमित AP - सीमित पद, अंतिम पद। अपरिमित AP - असीमित पद, कोई अंतिम पद नहीं।

› a और d से AP बनाना: a, a+d, a+2d...; AP की जाँच: a-a = a-a

› nवाँ पद: an = a + (n-1)d

› अंतिम से nवाँ पद: AP उल्टा कर d का चिन्ह बदलें या N ज्ञात कर (N-n+1)वाँ पद निकालें।

› Sn = n/2 [2a + (n-1)d] - AP के प्रथम n पदों का योग

› Sn = n/2 [a + l] जब अंतमि पद (l) ज्ञात हो।

› an = Sn - Sn-1 (nवाँ पद = n पदों का योग - (n-1) पदों का योग)

› AP सूत्र (an, Sn) का दैनकि जीवन की समस्याओं में प्रयोग।